第27卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 6
2010年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1064-11

一类不连续系统的Φ-变差稳定性*

邓 琳， 李宝麟

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

摘 要: 本文借助Φ-有界变差函数理论，讨论了一类不连续系统的Φ-有界变差解的稳定性，给出了该类不连续系统的Φ-变差稳定、Φ-变差吸引以及渐近Φ-变差稳定的定义，建立了Φ-有界变差解Φ-变差稳定性和渐近Φ-变差稳定性的Lyapunov型定理。该结果是对一类不连续系统变差稳定性定理的本质推广。

关键词: 不连续系统；Φ-有界变差解；Φ-变差稳定性；渐近Φ-变差稳定性；Lyapunov函数

分类号: **AMS**(2000) 34A20; 34G10 **中图分类号**: O175.12 **文献标识码**: A

1 引言

考虑动态系统

$$x' = f(t,x), \tag{1}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \quad x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f: G \to R^n.$$

G是R^{n+1}中的开域。如果(1)式的右端函数f在G上具有某种不连续性，则称系统(1)为不连续系统。文献[1]利用Henstock积分及其一类不等式，讨论了不连续系统(1)的Φ-有界变差解。文献[2]综述了不连续系统理论及其应用研究概况，如Carathéodory系统和Filippov系统等解的存在性、唯一性、解对参数的连续依赖性以及稳定性的一些结果。Φ-有界变差函数理论由Musielak及Orlicz等人在文献[3-5]中提出。此理论是通常意义下有界变差函数理论的推广与发展。

本文是文献[1]工作的后续工作，在文献[1]工作的基础上讨论了不连续系统Φ-有界变差解的稳定性，建立了Φ-变差稳定性和渐近Φ-变差稳定性的Lyapunov型定理。这是对文献[6]中一类不连续系统有界变差解的变差稳定性结果的本质推广。

2 预备知识

本文中设$\Phi(u)$是对$u \geq 0$定义的连续不减函数,满足$\Phi(0) = 0$。对$u > 0$, $\Phi(u) > 0$，本文将用到以下条件：

(Δ_2) 存在$u_0 \geq 0$及$L > 0$，使得对$0 < u \leq u_0$, $\Phi(2u) \leq L\Phi(u)$;

(c) $\Phi(u)$是凸函数。

Musielak及Orlicz等人在文献[3-5]中给出了Φ-有界变差函数的定义：

收稿日期: 2009-05-11. **作者简介**: 邓琳(1984年9月生)，女，硕士. 研究方向：应用微分方程.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10771171)；西北师范大学科技创新工程(NWNU-KJCXGC-212).

设 $[a,b]\subset R^1$，$-\infty<a<b<+\infty$。考虑函数 $x:[a,b]\to R^n$，$x(t)$ 称为 $[a,b]$ 上的Φ-有界变差函数，是指对 $[a,b]$ 的任何分划

$$\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b,\quad V_\Phi\big(x;[a,b]\big)=\sup_\pi\sum_{i=1}^m\Phi\big(\|x(t_i)-x(t_{i-1})\|\big)<+\infty,$$

并称 $V_\Phi(x;[a,b])$ 为函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的Φ-变差。

用 BV_Φ 表示 $[a,b]$ 上所有Φ-有界变差函数 $x(t)$，满足 $x(a)=0$ 组成的集合。如果 $\Phi(u)$ 满足 (Δ_2) 和 (c)，则 $(BV_\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$ 在通常意义的函数加法和纯量乘法下是一个Banach空间。范数

$$\|x\|_\Phi=\inf\Big\{k>0;\ V_\Phi\Big(\frac{x}{k};[a,b]\Big)\le 1\Big\}.$$

在以下的讨论中，本文总是假定 $\Phi(u)$ 满足条件 (Δ_2) 和 (c)。给定 $c>0$，记 $B_c=\{x\in R^n;\|x\|<c\}$。其中 $\|\cdot\|$ 为 n 维欧氏空间 R^n 中的范数

$$I=(a,b)\subset R^1,\quad -\infty<a<b<+\infty,\quad G=I\times B_c.$$

如果对任意的 $t\ge 0$，有 $f(0,t)=0$，则称函数 $x(t)=0\,(t\ge 0)$ 是不连续系统 (1) 在整个半轴 $[0,+\infty)$ 上的解。

定义 2.1[7] 设 $x(t):[a,b]\to R^n$ 是一个函数，如果存在 $A\in R^n$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta(t):[a,b]\to(0,+\infty)$，使得对 $[a,b]$ 的任何 δ-精细分划 $\Pi=\{[t_{i-1},t_i],\xi_i\}_{i=1}^n$，有

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x(\xi_i)(t_i-t_{i-1})-A\Big\|<\varepsilon,$$

则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上Henstock-Kurzweil可积，简称H-K可积，A 为积分值，记作

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=A.$$

定义 2.2[1] 设函数 $f:G\to R^n$ 为Carathéodory函数，称 $f:G\to R^n$ 属于 $V_\Phi(G,h,\omega)$，如果 $f(t,x)$ 满足下列条件：

(i) 存在正值函数 $\delta:I\to(0,+\infty)$，对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset I$ 以及 $x\in B_c$，有

$$\big\|f(\tau,x)(v-u)\big\|\le\Phi\big(h(v)-h(u)\big).$$

(ii) 对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset I$ 以及所有的 $x,y\in B_c$，有

$$\big\|f(\tau,x)-f(\tau,y)\big\|(v-u)\le\omega\big(\|x-y\|\big)\Phi\big(h(v)-h(u)\big),$$

其中 $h:I\to R^1$ 是定义在I上单调增加的左连续函数，而 $\omega:[0,+\infty)\to R^1$ 是单调增加的连续函数，且 $\omega(r)>0\,(r>0)$，$\omega(0)=0$。

(iii) 对每个定义在 $[\alpha,\beta]\subset I$ 上的阶梯函数 $\varphi(t)$，$f(t,\varphi(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是H-K可积的。

定义 2.3[1] 定义在区间I上的向量值函数 x 称为Carathéodory系统 (1) 的Φ-有界变差解，如果 x 满足：

(i) x 在I的任何紧子区间上是Φ-有界变差的；

(ii) 当 $t\in I$ 时，$(t,x)\in G$；

(iii) $x' = f(t,x)$ 对几乎所有的 $t \in I$ 成立。当 x 又在I上连续时，称 x 为 (1) 的连续 Φ-有界变差解。

引理2.1[7] 设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f, g : [a,b] \to R$ 是 $[a,b]$ 上的左连续函数。若对任意 $\sigma \in [a,b]$，存在 $\delta(\sigma) > 0$，使对任意 $\eta \in (0, \delta(\sigma))$，有不等式

$$f(\sigma+\eta) - f(\sigma) \le g(\sigma+\eta) - g(\sigma),$$

则对任意 $s \in [a,b]$，有 $f(s) - f(a) \le g(s) - g(a)$。

引理2.2[1] 设 $f \in V_\Phi(G,h,\omega)$ 且 $(t_0, x_0) \in G$，则存在 d^-, $d^+ > 0$，使得不连续系统 (1) 在区间 $[t_0 - d^-, t_0 + d^+]$ 上存在一个 Φ-有界变差解，满足 $x(t_0) = x_0$。

引理2.3[1] 设 $f \in V_\Phi(G,h,\omega)$, $x : [\alpha,\beta] \to R^n$, $[\alpha,\beta] \subseteq I$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的 Φ-有界变差函数且正则，使得对每个 $t \in (\alpha,\beta]$, $(t, x(t)) \in G$，则 H-K 积分

$$\int_\alpha^\beta f\big(t, x(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

存在。

3 主要结果及证明

为了给出本文的主要定理，我们首先建立如下三个定义：

定义3.1 如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得若 $y : [t_0, t_1] \to B_c$, $0 \le t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0, t_1]$ 上左连续，当

$$\Phi\big(\|y(t_0)\|\big) < \delta, \quad V_\Phi\Big(\Big(y(s) - \int_{t_0}^s f\big(t, y(t)\big)\mathrm{d}t\Big); [t_0, t_1]\Big) < \delta$$

时，对任意 $t \in [t_0, t_1]$，有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$，则称系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ-变差稳定的。

定义3.2 若存在 $\delta_0 > 0$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $T = T(\varepsilon) \ge 0$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$，使得若 $y : [t_0, t_1] \to B_c$, $0 \le t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0, t_1]$ 上左连续，当

$$\Phi\big(\|y(t_0)\|\big) < \delta_0, \quad V_\Phi\Big(\Big(y(s) - \int_{t_0}^s f\big(t, y(t)\big)\mathrm{d}t\Big); [t_0, t_1]\Big) < \gamma$$

时，对任意的 $t \in [t_0, t_1] \bigcap [t_0 + T(\varepsilon), +\infty)$, $t_0 \ge 0$，有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$，则称系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ-变差吸引的。

定义3.3 若系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 既是 Φ-变差稳定的，又是 Φ-变差吸引的，则称解 $x \equiv 0$ 是渐近 Φ-变差稳定的。

定理3.1 设有函数 $V : [0, +\infty) \times R^n \to R$，对任意 $x \in R^n$, $V(\cdot, x) : [0, +\infty) \to R$ 在 $(0, +\infty)$ 左连续，且下列条件成立：

(i) 对任意 $x, y \in R^n$, $t \in [0, +\infty)$, $L > 0$ 为常数，有

$$\big|V(t,x) - V(t,y)\big| \le L\Phi\big(\|x - y\|\big). \tag{2}$$

(ii) 存在实函数 $H : R^n \to R$，使得对不连续系统 (1) 在 $(\alpha,\beta) \subset [0, +\infty)$ 上的每一个有界变差解 $x : (\alpha,\beta) \to R^n$ 当 $t \in (\alpha,\beta)$ 时，有

$$\lim_{\eta \to 0+} \sup \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \le H\big(x(t)\big). \tag{3}$$

若 $y:[t_0,t_1]\to R^n$, $0\le t_0<t_1<+\infty$，是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0,t_1]$ 左连续，则有不等式

$$V\big(t_1,x(t_1)\big)\le V\big(t_0,x(t_0)\big)+NV_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,t_1]\Big)+R(t_1-t_0) \tag{4}$$

成立，其中

$$R=\sup_{t\in[t_0,t_1]}H\big(y(t)\big),\quad N=L\chi(a'),$$

$\chi(a')$ 由文献 [4] 中定理 1.02 定义。

证明 设 $y:[t_0,t_1]\to R^n$, $0\le t_0<t_1<+\infty$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0,t_1]$ 左连续。显然函数 $V(t,y(t)):[t_0,t_1]\times R^n\to R$ 在 $(t_0,t_1]$ 上左连续。

设 $\sigma\in[t_0,t_1]$，若 $x:[\sigma,\sigma+\eta_1(\sigma)]\to R^n$ 是系统 (1) 在区间 $[\sigma,\sigma+\eta_1(\sigma)]$ 上的 Φ-有界变差解，$\eta_1>0$ 满足初始条件 $x(\sigma)=y(\sigma)$。解的存在性由引理 2.2 保证。由引理 2.3，有

$$\int_\sigma^{\sigma+\eta_1(\sigma)}f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t,\quad \int_\sigma^{\sigma+\eta_1(\sigma)}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t$$

存在，由 (2) 式，对每一个 $\eta\in[0,\eta_1(\sigma)]$，有

$$\begin{aligned}&V\big(\sigma+\eta,y(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)\big)\\ \le\ & L\Phi\big(\|y(\sigma+\eta)-x(\sigma+\eta)\|\big)=L\Phi\Big(\Big\|y(\sigma+\eta)-y(\sigma)-\int_\sigma^{\sigma+\eta}f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t\Big\|\Big).\end{aligned}$$

再由 (3) 式，对任意 $\varepsilon>0$, $\eta\in(0,\eta_2(\sigma))$, $\eta_2(\sigma)\le\eta_1(\sigma)$，且让 $\eta_2(\sigma)>0$ 充分小，有

$$\begin{aligned}&V\big(\sigma+\eta,y(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma,x(\sigma)\big)\\ =\ & V\big(\sigma+\eta,y(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)\big)+V\big(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma,x(\sigma)\big)\\ \le\ & L\Phi\Big(\Big\|y(\sigma+\eta)-y(\sigma)-\int_\sigma^{\sigma+\eta}f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t\Big\|\Big)+\eta H\big(x(\sigma)\big)\\ \le\ & L\Phi\Big(\Big\|y(\sigma+\eta)-y(\sigma)-\int_\sigma^{\sigma+\eta}f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t\Big\|\Big)+\eta R+\eta\varepsilon.\end{aligned}$$

定义

$$\Psi(s)=y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t,\quad s\in[t_0,t_1],$$

则函数 $\Psi:[t_0,t_1]\to R^n$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数且在 $(t_0,t_1]$ 上左连续。因此上述不等式可继续化为

$$\begin{aligned}&V\big(\sigma+\eta,y(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma,x(\sigma)\big)\\ \le\ & L\Phi\Big(\Big\|y(\sigma+\eta)-y(\sigma)-\int_\sigma^{\sigma+\eta}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big\|\Big)\\ &+L\Phi\Big(\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\|\Big)+\eta R+\eta\varepsilon\\ \le\ & N\big(V_\Phi\big(\Psi;[t_0,\sigma+\eta]\big)-V_\Phi\big(\Psi;[t_0,\sigma]\big)\big)+\eta R+\eta\varepsilon\\ &+N\Phi\Big(\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\|\Big).\end{aligned} \tag{5}$$

考察(5)式的最后一项。因为$f \in V_\Phi(G,h,\omega)$，所以对任意的$\varepsilon > 0$，存在正值函数$\delta : [\sigma,\sigma+\eta] \to (0,+\infty)$，使对$[\sigma,\sigma+\eta]$的任何$\delta$-精细分划

$$D = \{(\tau_j;[\alpha_{j-1},\alpha_j]),\ j = 1,2,\cdots,m\},$$

从而令$M(t) = V_\Phi(h;[\sigma,t])$, $\sigma \le t \le \sigma+\eta$，由$\Phi(u)$及$h$的定义，$M(t)$为$[\sigma,\sigma+\eta]$上的非负不减左连续函数，有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\| \\
\le\ & \Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^m\big[f(\tau_j,y(\tau_j))-f(\tau_j,x(\tau_j))\big](\alpha_j-\alpha_{j-1})\Big\| \\
&+\Big\|\sum_{j=1}^m\big[f(\tau_j,y(\tau_j))-f(\tau_j,x(\tau_j))\big](\alpha_j-\alpha_{j-1})\Big\| \\
<\ & \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{j=1}^m\omega\big(\|y(\tau_j)-x(\tau_j)\|\big)\Phi\big(|h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})|\big) \\
<\ & \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{j=1}^m\omega\big(\|y(\tau_j)-x(\tau_j)\|\big)\big(M(\alpha_j)-M(\alpha_{j-1})\big) \\
&-\int_\sigma^{\sigma+\eta}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau)+\int_\sigma^{\sigma+\eta}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau) \\
<\ & \varepsilon+\int_\sigma^{\sigma+\eta}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau) \\
=\ & \varepsilon+\lim_{\alpha\to0+}\Big[\int_\sigma^{\sigma+\alpha}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau)+\int_{\sigma+\alpha}^{\sigma+\eta}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau)\Big] \\
=\ & \varepsilon+\omega\big(\|y(\sigma)-x(\sigma)\|\big)\big(M(\sigma+)-M(\sigma)\big)+\lim_{\alpha\to0+}\int_{\sigma+\alpha}^{\sigma+\eta}\omega\big(\|y(\tau)-x(\tau)\|\big)\mathrm{d}M(\tau) \\
\le\ & \varepsilon+\sup_{\rho\in[\sigma,\sigma+\eta]}\omega\big(\|y(\rho)-x(\rho)\|\big)\lim_{\alpha\to0+}\big(M(\sigma+\eta)-M(\sigma+\alpha)\big) \\
=\ & \varepsilon+\sup_{\rho\in[\sigma,\sigma+\eta]}\omega\big(\|y(\rho)-x(\rho)\|\big)\big(M(\sigma+\eta)-M(\sigma+)\big).
\end{aligned} \tag{6}$$

对$\rho \in [\sigma,\sigma+\eta_2(\sigma)]$，有

$$y(\rho)-x(\rho) = y(\rho)-y(\sigma)-\int_\sigma^\rho f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\lim_{\rho\to\sigma+}\big(y(\rho)-x(\rho)\big) = y(\sigma+)-y(\sigma)-\lim_{\rho\to\sigma+}\int_\sigma^\rho f\big(t,x(t)\big)\mathrm{d}t = \Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma).$$

所以

$$\lim_{\rho\to\sigma+}\big\|y(\rho)-x(\rho)\big\| = \big\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\big\|. \tag{7}$$

令

$$\beta=\frac{\varepsilon}{N(U(t_1)-U(t_0)+1)}>0, \tag{8}$$

并设 $r=r(\beta)>0$，使 $\omega(r)<\beta$，选 $\alpha\in(0,\frac{r}{2})$，由 (7) 式，存在一个 $\eta_3(\sigma)\in(0,\eta_2(\sigma))$，对任意 $\rho\in(\sigma,\sigma+\eta_3(\sigma))$，有

$$\big\|y(\rho)-x(\rho)\big\|\le\big\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\big\|+\alpha,$$

则

$$\omega\big(\|y(\rho)-x(\rho)\|\big)\le\omega\big(\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\|+\alpha\big). \tag{9}$$

定义

$$P(\beta)=\Big\{\sigma\in[t_0,t_1];\ \big\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\big\|\ge\frac{r}{2}\Big\},$$

Ψ 在 $[t_0,t_1]$ 上 Φ-有界变差，集合 $P(\beta)$ 有限，用 $n(\beta)$ 表示集合 $P(\beta)$ 中元素的个数，若 $\sigma\in[t_0,t_1]\setminus P(\beta)$ 且 $\rho\in(\sigma,\sigma+\eta_3(\sigma))$，那么由 (9) 式，有

$$\omega\big(\|y(\rho)-x(\rho)\|\big)\le\omega\big(\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\|+\alpha\big)\le\omega\Big(\frac{r}{2}+\alpha\Big)<\omega\Big(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\Big)=\omega(r)<\beta.$$

当 $\eta\in(0,\eta_3(\sigma))$ 时，由 (6) 式，有

$$\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\|\le\beta\big(M(\sigma+\eta)-M(\sigma+)\big). \tag{10}$$

若 $\sigma\in[t_0,t_1]\bigcap P(\beta)$，则存在 $\eta_4(\sigma)\in(0,\eta_3(\sigma))$，使对任意 $\eta\in(0,\eta_4(\sigma))$，有

$$M(\sigma+\eta)-M(\sigma+)=\big|M(\sigma+\eta)-M(\sigma+)\big|<\frac{\beta}{(n(\beta)+1)\omega(\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\|+\alpha)},$$

且 $(\sigma,\sigma+\eta_4(\sigma))\bigcap P(\beta)=\emptyset$，因此对每一个 $\eta\in(\sigma,\sigma+\eta_4(\sigma))$，由 (6), (9) 式，有

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\|\\&\le\ \omega\big(\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\|+\alpha\big)\frac{\beta}{(n(\beta)+1)\omega(\|\Psi(\sigma+)-\Psi(\sigma)\|+\alpha)}=\frac{\beta}{n(\beta)+1}.\end{aligned} \tag{11}$$

定义

$$\widetilde{M}_\alpha(t)=\frac{\beta}{n(\beta)+1}\sum_{\sigma\in P(\beta)}I_\sigma(t),\quad t\in[t_0,t_1],$$

当 $t\le\sigma$ 时，$I_\sigma(t)=0$；当 $t>\sigma$ 时，$I_\sigma(t)=1$，$\widetilde{M}_\alpha:[t_0,t_1]\to R$ 是不减左连续函数，且

$$\widetilde{M}_\alpha(t_1)-\widetilde{M}_\alpha(t_0)=\frac{\beta}{n(\beta)+1}n(\beta)<\beta. \tag{12}$$

显然 $\widetilde{M}_\alpha$ 不连续点仅在集合 $P(\beta)$ 内，且对 $t\in P(\beta)$，有

$$\widetilde{M}_\alpha(t+)-\widetilde{M}_\alpha(t)=\frac{\beta}{n(\beta)+1},\quad t\in[t_0,t_1],$$

由函数 $\widetilde{M}_\alpha$，可设 $M_\alpha(t)=\beta M_c(t)+\widetilde{M}_\alpha(t)$，其中 M_c 表示函数 M 的连续部分，则 M_α 为 $[t_0,t_1]$ 上不减左连续函数，且由 (8), (12) 式，可得

$$\begin{aligned} M_\alpha(t_1)-M_\alpha(t_0) &= \beta\big(M_c(t_1)-M_c(t_0)\big)+\widetilde{M}_\alpha(t_1)-\widetilde{M}_\alpha(t_0) \\ &< \beta\big[M(t_1)-M(t_0)+1\big]=\frac{\varepsilon}{N}. \end{aligned} \tag{13}$$

若 $\sigma\in[t_0,t_1]\setminus P(\beta)$，则设 $\delta(\sigma)=\eta_3(\sigma)>0$；若 $\sigma\in[t_0,t_1]\bigcap P(\beta)$，则设 $\delta(\sigma)=\eta_4(\sigma)>0$；当 $\sigma\in[t_0,t_1]$，$\eta\in[0,\delta(\sigma)]$ 时，由 (10), (11) 式及 M_α 的定义，可得

$$\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\mathrm{d}t\Big\|\le M_\alpha(\sigma+\eta)-M_\alpha(\sigma),$$

因此，由文献 [3] 中定理 1.03，定理 1.17，有

$$\begin{aligned} &\Phi\Big(\Big\|\int_\sigma^{\sigma+\eta}\big[f(t,y(t))-f(t,x(t))\big]\Big\|\Big) \\ \le\ &\Phi\big(M_\alpha(\sigma+\eta)-M_\alpha(\sigma)\big)=V_\Phi\big(M_\alpha;[\sigma,\sigma+\eta]\big) \\ \le\ &V_\Phi\big(M_\alpha;[t_0,\sigma+\eta]\big)-V_\Phi\big(M_\alpha;[t_0,\sigma]\big). \end{aligned}$$

故当 $\sigma\in[t_0,t_1]$，$\eta\in[0,\delta(\sigma)]$，由 (5) 式，有

$$\begin{aligned} &\big(\sigma+\eta,y(\sigma+\eta)\big)-V\big(\sigma,x(\sigma)\big) \\ \le\ &N\Big(V_\Phi\big(\Psi;[t_0,\sigma+\eta]\big)-V_\Phi\big(\Psi;[t_0,\sigma]\big)+V_\Phi\big(M_\alpha;[t_0,\sigma+\eta]\big)-V_\Phi\big(M_\alpha;[t_0,\sigma]\big)\Big)+\eta R+\eta\varepsilon \\ =\ &G(\sigma+\eta)-G(\sigma), \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$G(t)=NV_\Phi\big(\Psi;\ [t_0,t]\big)+R(t-t_0)+\varepsilon(t-t_0)+NV_\Phi\big(U_\alpha;\ [t_0,t]\big),$$

G 是 $[t_0,t_1]$ 上的左连续函数。由引理 2.1 及 (13), (14) 式，可得

$$\begin{aligned} &V\big(t_1,y(t_1)\big)-V\big(t_0,y(t_0)\big) \\ \le\ &G(t_1)-G(t_0) \\ =\ &NV_\Phi\big(\Psi;\ [t_0,t_1]\big)+R(t_1-t_0)+\varepsilon(t_1-t_0)+NV_\Phi\big(M_\alpha;\ [t_0,t_1]\big) \\ <\ &NV_\Phi\big(\Psi;\ [t_0,t_1]\big)+R(t_1-t_0)+\varepsilon(t_1-t_0)+N\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{N}\Big), \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得 (4) 式。 **证毕**

定理 3.2 设有函数

$$V:[0,+\infty)\times\bar{B}_a\to R,\quad \bar{B}_a=\big\{y\in R^n:\|y\|\le a\big\},\quad 0<a<c,$$

对任意 $x\in\bar{B}_a$，$V(\cdot,x)$，左连续。设函数 $V(t,x)$ 是正定的，即

(i) 存在一个连续递增实函数 $\upsilon:[0,+\infty)\to R$，使得 $\upsilon(\rho)=0\Longleftrightarrow\rho=0$；

(ii)　对任意 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\bar{B}_a$，有

$$V(t,x)\geq v\big(\Phi(\|x\|)\big), \tag{15}$$

$$V(t,0)=0, \tag{16}$$

对任意 $x,y\in\bar{B}_a$，$L>0$ 是常数，有

$$\big|V(t,x)-V(t,y)\big|\leq L\Phi\big(\,\|x-y\|\,\big). \tag{17}$$

若函数 $V(t,x(t))$ 对不连续系统 (1) 任何一个 Φ-有界变差解 $x(t):[\alpha,\beta]\to R^n$ 是不增函数，则系统 (1) 的解 $x\equiv 0$ 是 Φ-变差稳定的。

证明　由假设，函数 $V(t,x(t))$ 对不连续系统 (1) 的任何一个 Φ-有界变差解 $x(t):[\alpha,\beta]\to R^n$ 是不增函数，因此

$$\lim_{\eta\to 0^+}\sup\frac{V(t+\eta,x(t+\eta))-V(t,x(t))}{\eta}\leq 0,\quad t\in[\alpha,\beta]. \tag{18}$$

设 $\varepsilon>0$，若 $y:[t_0,t_1]\to R^n$，$0\leq t_0<t_1<+\infty$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0,t_1]$ 左连续。函数 V 满足定理 3.1 中的 (3) 式 (取 $H\equiv 0$)，因此由 (4), (16), (17) 式，对任意 $r\in[t_0,t_1]$，有

$$\begin{aligned}V\big(r,y(r)\big)\;&\leq\;V\big(t_0,y(t_0)\big)+NV_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,r]\Big)\\&\leq\;L\Phi\big(\,\|y(t_0)\|\,\big)+NV_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,r]\Big)\\&\leq\;N\Phi\big(\,\|y(t_0)\|\,\big)+NV_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,r]\Big).\end{aligned} \tag{19}$$

定义 $\alpha(\varepsilon)=\inf\limits_{r\leq\varepsilon}v(r)$，则

$$\alpha(\varepsilon)>0,\quad\lim_{\varepsilon\to 0+}\alpha(\varepsilon)=0.$$

设 $\delta(\varepsilon)>0$，使得 $2N\delta(\varepsilon)<\alpha(\varepsilon)$。若在这种情况下，函数 y 满足

$$\Phi\big(\,\|y(t_0)\|\,\big)<\delta(\varepsilon),\quad V_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,t_1]\,\Big)<\delta(\varepsilon),$$

则由 (19) 式，可得

$$V\big(r,y(r)\big)\leq 2N\delta(\varepsilon)<\alpha(\varepsilon),\quad r\in[t_0,t_1]. \tag{20}$$

若存在一个 $\widetilde{t}\in[t_0,t_1]$，使得 $\Phi(\|y(\widetilde{t})\|)\geq\varepsilon$，则由 (15) 式，有

$$V\big(\widetilde{t},y(\widetilde{t})\big)\geq v\big(\Phi(\|y(\widetilde{t})\|)\big)\geq\inf_{r\leq\varepsilon}v(r)=\alpha(\varepsilon),$$

这与 (20) 式矛盾！

因此，对所有的 $t\in(t_0,t_1]$，有 $\Phi(\|y(t)\|)<\varepsilon$，由定义 3.1，系统 (1) 的解 $x\equiv 0$ 是 Φ-变差稳定的。

证毕

定理3.3 设函数 $V:[0,+\infty)\times\bar{B}_a\to R$ 满足定理3.2中的条件。若对系统(1)的任何一个 Φ-有界变差解 $x:[t_0,t_1]\to\bar{B}_a$，当 $t\in[t_0,t_1]$ 时，有

$$\lim_{\eta\to 0+}\sup\frac{V(t+\eta,x(t+\eta))-V(t,x(t))}{\eta}\le -H\big(x(t)\big),\tag{21}$$

其中 $H:R^n\to R$ 连续，$H(0)=0$，$H(x)>0\,(x\ne 0)$，则系统(1)的解 $x\equiv 0$ 是渐近 Φ-变差稳定的。

证明 由(21)式知函数 $V(t,x(t))$ 对不连续系统(1)的任何一个 Φ-有界变差解 $x(t)$ 是不增函数，由定理3.2，系统(1)的解 $x\equiv 0$ 是 Φ-变差稳定的。

下面只需证明系统(1)的解 $x\equiv 0$ 是 Φ-变差吸引的即可。

由 $x\equiv 0$ 是 Φ-变差稳定的可知，存在一个 $\delta_0\in(0,\Phi(a))$，若 $y:[t_0,t_1]\to R^n$，$0\le t_0<t_1<+\infty$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0,t_1]$ 左连续，使 $\Phi(\|y(t_0)\|)<\delta_0$，且

$$V_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,t_1]\Big)<\delta_0,$$

则对所有 $t\in[t_0,t_1]$，有 $\Phi(\|y(t)\|)<\Phi(a)$，由函数 $\Phi(u)$ 的定义知，$\|y(t)\|<a$，即对所有 $t\in(t_0,t_1]$，有 $y(t)\in\bar{B}_a$。

对任意 $\varepsilon>0$，由解 $x\equiv 0$ 的稳定性知，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，对每一个 $y:[t_0,t_1]\to R^n$，$0\le t_0<t_1<+\infty$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $[t_0,t_1]$ 左连续。若满足 $\Phi(\|y(t_0)\|)<\delta(\varepsilon)$，且

$$V_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,t_1]\Big)<\delta(\varepsilon),$$

则对所有 $t\in[t_0,t_1]$，有 $\Phi(\|y(t)\|)<\varepsilon$。

令

$$\gamma(\varepsilon)=\min\big(\delta_0,\delta(\varepsilon)\big),\quad T(\varepsilon)=-N\frac{\delta_0+\gamma(\varepsilon)}{R}>0,$$

其中

$$R=\sup\big\{-H(x):\gamma(\varepsilon)\le\Phi(\|x\|)<\varepsilon\big\}=-\inf\big\{H(x):\gamma(\varepsilon)\le\Phi(\|x\|)<\varepsilon\big\}<0.$$

若 $y:[t_0,t_1]\to R^n$ 是 $[t_0,t_1]$ 上的 Φ-有界变差函数，在 $(t_0,t_1]$ 左连续，使 $\Phi(\|y(t_0)\|)<\delta_0$，且

$$V_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,[t_0,t_1]\Big)<\gamma(\varepsilon).\tag{22}$$

设 $T(\varepsilon)<t_1-t_0$，即 $t_0+T(\varepsilon)<t_1$，下面证明存在一个 $t^*\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]$，使得 $\Phi(\|y(t^*)\|)<\gamma(\varepsilon)$。反设不成立，即对所有 $s\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]$，有 $\Phi(\|y(s)\|)\ge\gamma(\varepsilon)$，则由定理3.1，有

$$\begin{aligned}&V\big(t_0+T(\varepsilon),y(t_0+T(\varepsilon))\big)-V\big(t_0,y(t_0)\big)\\\le\;&NV_\Phi\Big(\Big(y(s)-\int_{t_0}^{s}f\big(t,y(t)\big)\mathrm{d}t\Big);\,\big[t_0,t_0+T(\varepsilon)\big]\Big)+RT(\varepsilon)\\<\;&N\gamma(\varepsilon)+R\frac{-N(\delta_0+\gamma(\varepsilon))}{R}=-N\delta_0.\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
& V\big(t_0+T(\varepsilon), y(t_0+T(\varepsilon))\big) \\
\leq\ & V\big(t_0, y(t_0)\big) - N\delta_0 \leq L\Phi\big(\,\|y(t_0)\|\,\big) - N\delta_0 \\
\leq\ & N\Phi\big(\,\|y(t_0)\|\,\big) - N\delta_0 < (N-N)\delta_0 = 0,
\end{aligned}
$$

这与不等式

$$
V\big(t_0+T(\varepsilon),\, y\big(t_0+T(\varepsilon)\big)\big) \geq v\big(\Phi\big(\,\|y(t_0+T(\varepsilon))\|\,\big)\big) \geq v\big(\gamma(\varepsilon)\big) > 0
$$

矛盾！因此一定存在 $t^* \in [t_0, t_0+T(\varepsilon)]$，使得 $\Phi(\|y(t^*)\|) < \gamma(\varepsilon)$。又由 (22) 式，对所有 $t \in [t^*, t_1]$，有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$，因而对 $t > t_0 + T(\varepsilon)$，也有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$，从而系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ-变差吸引的。 **证毕**

注 对所定义的函数 $\Phi(u)$，如果

$$
0 < \frac{\Phi(u)}{u} < +\infty,
$$

则有 $BV_\Phi[\alpha,\beta] = BV[\alpha,\beta]$，其中 $BV_\Phi[\alpha,\beta]$ 及 $BV[\alpha,\beta]$ 分别表示通常意义下 $[\alpha,\beta]$ 上的 Φ-有界变差函数全体和 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数全体。所以，在此情形下，本文主要结果等价于文献 [6] 中变差稳定性的有关结果。如果

$$
\lim_{u\to 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} = 0,
$$

有 $BV[\alpha,\beta] \subset BV_\Phi[\alpha,\beta]$。例如 $\Phi(u) = u^p\,(1 < p < +\infty)$，有

$$
\lim_{u\to 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} = 0,
$$

所以本文主要结果是文献 [6] 中变差稳定性结果的本质推广。

参考文献：

[1] 肖艳萍，李宝麟. 一类不连续系统的 Φ-有界变差解[J]. 工程数学学报，2008, 25(3): 489-494
Xiao Y P, Li B L. Bounded Φ-variation solutions to a kind of discontinuous systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(3): 489-494

[2] 贺建勋，陈彭年. 不连续微分方程的某些理论与应用[J]. 数学进展，1987, 16(1): 17-32
He J X, Chen P N. Theory and application of certain discontinuous differential equations[J]. Advances in Mathematics, 1987, 16(1): 17-32

[3] Musielak J, Orlicz W. On generalized variation(I)[J]. Studia Math, 1959, 18: 11-41

[4] Lesniewz R, Orlicz W. On generalized variation(II)[J]. Studia Math, 1973, 45: 71-109

[5] Musielak J, Orlicz W. On space of functions of finite generalized variation[J]. Bull Acad Pol Soc C III, 1957, 5: 389-392

[6] 李宝麟，尚德泉. 一类不连续系统的变差稳定性[J]. 西北师范大学学报，2006, 42(2): 1-3
Li B L, Shang D Q. Variational stability for a class of discontinuous systems[J]. Journal of Northwest Normal University, 2006, 42(2): 1-3

[7] Schwabik S. Generalized Ordinary Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1992

Φ-Variational Stability for a Class of Discontinuous Systems

DENG Lin, LI Bao-lin

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070)

Abstract: By using the bounded Φ-variation function, the stability of the bounded Φ-variation solution to a class of discontinuous systems is discussed. With respect to this kind of discontinuous systems, the Φ-variational stability, the Φ-variational attraction and asymptotically Φ-variational stabklity are defined. The Lyapunov type theorems for the Φ-variational stability and asymptotically Φ-variational stability of the bounded Φ-variation solutions are established. This result is an essential generalization of the variational stability theorem for a class of discontinuous systems.

Keywords: discontinuous system; bounded Φ-variation solution; Φ-variational stability; asymptotically Φ-variational stability; Lyapunov function

Received: 11 May 2009. **Accepted:** 07 Sep 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771171); the Science and Technology Innovation Project of Northwest Normal University (NWNU-KJCXGC-212).